



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ
ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນະຖາວອນ

ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ
ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງ ຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນຕົ້ນ
ລະດັບຊາດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2016-2017

ວິຊາ ຄະນິດສາດ

ເວລາ: 120 ນາທີ

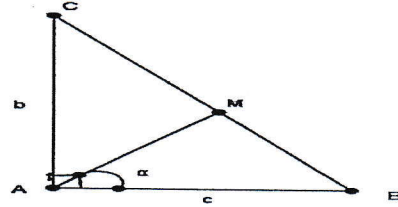
- ໃຫ້ $x; y > 0$ ເຊິ່ງວ່າ: $x^y = y^x$ ແລະ $y = 5x$. ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ x
- ຈົ່ງຄິດໄລ່: $A = 2^{2017} \times 5^{2016} - 3^2$
- ຖ້າວ່າ: $a^2 + b^2 = 7ab$ ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $a^4 + b^4 = 47a^2b^2$
- ໃຫ້ສາມຈຳນວນຈິງ $a; b$ ແລະ c ເຊິ່ງວ່າ: $a + b + c = 2015$ ແລະ $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2017}{2016}$
ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$
- ຈົ່ງແກ້ສົມຜົນ: $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$
- ຈົ່ງແກ້ລະບົບສົມຜົນ: $\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - y^2 = 357 \end{cases}$
- ໃຫ້ຮູບສາມແຈສາກ ABC , ສາກຢູ່ A , ສອງຂ້າງມຸມສາກເທົ່າ b ແລະ c , ຢູ່ເທິງຂ້າງ BC ເລືອກເອົາ
ເມັດ M ໜຶ່ງຕາມໃຈ ຮູ້ວ່າ $\widehat{BAM} = \alpha$. ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $AM = \frac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}$
- ໃຫ້ຮູບຈັດຕຸລັດ $ABCD$, ເມັດ M ນອນຢູ່ໃນຮູບຈັດຕຸລັດ ທີ່ຕອບສະໜອງ $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15^\circ$
ຈົ່ງພິສູດວ່າ ຮູບສາມແຈ MCD ແມ່ນຮູບສາມແຈສະເໝີ.

ຄະນະກຳມະການອອກຫົວບົດ

ຂະໜານຕອບທົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນຕົ້ນ
ລະດັບຊາດປະຈຳສົກຮຽນ 2016-2017

№	ຂະໜານຕອບ
1	ໃຫ້ $x; y > 0$ ເຊິ່ງວ່າ : $x^y = y^x$ ແລະ $y = 5x$ ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ x
	$x^y = y^x$ $x^{5x} = (5x)^x = 5^x \cdot x^x$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5}\right)^x = x^x \Leftrightarrow \frac{x^5}{5} - x = 0$ $\Leftrightarrow x(x^4 - 5) = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{5})(x^2 + \sqrt{5}) = 0$ $\Rightarrow x^2 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{\sqrt{5}} = 5^{\frac{1}{4}}$
2	ຈົ່ງຄິດໄລ່ $A = 2^{2017} \cdot 5^{2016} - 3^2$
	$A = 2^{2017} \cdot 5^{2016} - 3^2$ $= 2 \cdot 2^{2016} \cdot 5^{2016} - 9$ $= 2 \cdot 10^{2016} - 9$ $= \underbrace{200 \dots 00}_{2016 \text{ ໂຕ}} - 9 = \underbrace{199 \dots 91}_{2015 \text{ ໂຕ}}$
3	ຖ້າວ່າ: $a^2 + b^2 = 7ab$ ຈົ່ງພິສູດວ່າ $a^4 + b^4 = 47a^2b^2$
	<p>ຈາກ $a^2 + b^2 = 7ab$</p> <p>ຂຶ້ນກຳລັງສອງທັງສອງຟາກໄດ້ $(a^2 + b^2)^2 = (7ab)^2$</p> $\Leftrightarrow a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 49a^2b^2$ $\Leftrightarrow a^4 + b^4 = 49a^2b^2 - 2a^2b^2$ $\Leftrightarrow a^4 + b^4 = 47a^2b^2$ <p>ດັ່ງນັ້ນ: $a^4 + b^4 = 47a^2b^2$</p>
4	ໃຫ້ສາມຈຳນວນຈິງ $a; b$ ແລະ c ເຊິ່ງວ່າ $a + b + c = 2015$ ແລະ
	$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2017}{2016}$ ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$
	$a + b + c = 2015 \Rightarrow \begin{cases} a = 2015 - (b + c) \\ b = 2015 - (c + a) \\ c = 2015 - (a + b) \end{cases}$ $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2015 - (b+c)}{b+c} + \frac{2015 - (c+a)}{c+a} + \frac{2015 - (a+b)}{a+b}$

	$= \frac{2015}{b+c} - 1 + \frac{2015}{c+a} - 1 + \frac{2015}{a+b} - 1 = 2015 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - 3$ $= 2015 \times \frac{2017}{2016} - 3 = \frac{4064255 - 6048}{2016} = \frac{4058207}{2016}$
5	<p>ຈົ່ງແກ້ສົມຜົນ $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$</p> <p>ເງື່ອນໄຂເພື່ອໃຫ້ຮາກຂັ້ນສອງມີຄວາມໝາຍ:</p> $\begin{cases} 3x^2 - 7x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 5x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases} (*)$ <p>ຖອນໄດ້ $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$</p> $\Leftrightarrow \frac{(3x^2 - 7x + 3) - (3x^2 - 5x - 1)}{\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{3x^2 - 5x - 1}} = \frac{(x^2 - 2) - (x^2 - 3x + 4)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}}$ $\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} + \frac{2}{\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{3x^2 - 5x - 1}} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ <p>ກວດຄືນເຫັນວ່າ $x = 2$ ຕອບສະໜອງລະບົບສົມຜົນ (*)</p> <p>ດັ່ງນັ້ນສົມຜົນມີໃຈຜົນໜຶ່ງໃຈຜົນດຽວຄື $x = 2$</p>
6	<p>ຈົ່ງແກ້ລະບົບສົມຜົນ: $\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - y^2 = 357 \end{cases}$</p> $\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - y^2 = 357 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 7 & (1) \\ (x - y)(x + y) = 357 & (2) \end{cases}$ <p>ເອົາ (1) ແທນໃສ່ (2) ເອົາໄດ້:</p> $\begin{cases} x - y = 7 & (1) \\ x + y = 51 & (3) \end{cases}$ <p>ເອົາ (1) ແທນໃສ່ (3) ເອົາໄດ້: $x = 29$</p> <p>ເມື່ອເອົາ $x = 29$ ແທນໃສ່ (1) ເອົາໄດ້: $y = 22$</p>
7	<p>ໃຫ້ຮູບສາມແຈສາກ ABC ສາກຢູ່ A ສອງຂ້າງມູມສາກເທົ່າ b ແລະ c ຢູ່ເທິງຂ້າງ BC ເລືອກເອົາເມັດ M ໜຶ່ງຕາມໃຈ ຮູ້ວ່າ $\widehat{BAM} = \alpha$ ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $AM = \frac{bc}{b \cos \alpha + c \sin \alpha}$</p>



ເຮົາມີ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle AMC}$

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AM \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AM \sin(90^\circ - \alpha)$$

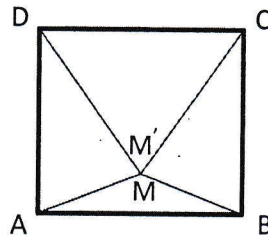
$$b \cdot c = c \cdot AM \sin \alpha + b \cdot AM \cos \alpha$$

$$b \cdot c = c \cdot AM \sin \alpha + b \cdot AM \cos \alpha$$

$$bc = AM(c \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow AM = \frac{bc}{c \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha}$$

8 ໃຫ້ຮູບຈັດຕຸ້ລັດ ABCD, ເມັດ M ນອນຢູ່ໃນຮູບຈະຕຸ້ລັດ ທີ່ຕອບສະໜອງ $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15^\circ$ ຈົ່ງພິສູດວ່າຮູບສາມແຈ MCD ແມ່ນຮູບສາມແຈສະເໝີ.



ຢູ່ໃນຮູບຈັດຕຸ້ລັດສ້າງຮູບສາມແຈສະເໝີ $M'CD$. ເວລານັ້ນ $\triangle ADM'$ ທ່ຽງຢູ່ D ແລະ $\triangle BCM'$ ທ່ຽງຢູ່ C

ສະນັ້ນເຮົາມີ $\widehat{ADM'} = \widehat{BCM'} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\rightarrow \widehat{DAM'} = \widehat{CBM'} = 75^\circ$$

$$\rightarrow \widehat{BAM'} = \widehat{ABM'} = 15^\circ$$

ອີງຕາມສົມມຸດເຮົາມີ $\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = 15^\circ$

ຖອນໄດ້ $M' \equiv M$ ຫລື $\triangle MCD$ ສະເໝີ